TÀI LIỆU ÔN TẬP LỚP 11
CHƯƠNG IV GIỚI HẠN

I. Giới hạn của dãy số

Giới hạn hữu hạn	Giới hạn vô cực
1. Giới hạn đặc biệt: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^k}=0\ (k\in\mathbb{Z}^+)$ $\lim\limits_{n\to+\infty}q^n=0\ (\lvert q\rvert<1)$; $\lim\limits_{n\to+\infty}C=C$ ***2. Định lí :*** *a) Nếu lim u_n = a, lim v_n = b thì* • *lim (u_n + v_n) = a + b* • *lim (u_n – v_n) = a – b* • *lim ($u_n.v_n$) = a.b* • $\lim\frac{u_n}{v_n}=\frac{a}{b}$ *(nếu b ≠ 0)* *b) Nếu $u_n\ge 0$, ∀n và lim u_n= a thì a ≥ 0 và lim* $\sqrt{u_n}=\sqrt{a}$ *c) Nếu* $\lvert u_n\rvert\le v_n$, *∀n và lim v_n = 0* *thì lim u_n = 0* *d) Nếu lim u_n = a thì* $\lim\lvert u_n\rvert=\lvert a\rvert$ ***3. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn*** $S=u_1+u_1q+u_1q^2+\ldots=\frac{u_1}{1-q}\ \left(\lvert q\rvert<1\right)$	***1. Giới hạn đặc biệt:*** $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}=+\infty$ $\lim\limits_{n\to+\infty}n^k=+\infty\ (k\in\mathbb{Z}^+)$ $\lim\limits_{n\to+\infty}q^n=+\infty\ (q>1)$ ***2. Định lí:*** *a)Nếu* $\lim\lvert u_n\rvert=+\infty$ *thì* $\lim\frac{1}{u_n}=0$ *b) Nếu lim u_n = a, lim v_n = ±∞ thì* $\lim\frac{u_n}{v_n}=0$ *c) Nếu lim u_n =a ≠ 0, lim v_n = 0* *thì* $\lim\frac{u_n}{v_n}=\begin{cases}+\infty & \text{nếu } a.v_n>0\\ -\infty & \text{nếu } a.v_n<0\end{cases}$ *d) Nếu lim u_n = +∞, lim v_n = a* *thì* $\lim(u_n.v_n)=\begin{cases}+\infty & \text{nếu } a>0\\ -\infty & \text{nếu } a<0\end{cases}$ ** Khi tính giới hạn có một trong các dạng vô định:* $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty-\infty$, $0.\infty$ *thì phải tìm cách khử dạng vô định.*

Một số phương pháp tìm giới hạn của dãy số:

• ***Chia cả tử và mẫu cho luỹ thừa cao nhất của n.***

VD: a) $\lim\frac{n+1}{2n+3}=\lim\frac{1+\frac{1}{n}}{2+\frac{3}{n}}=\frac{1}{2}$

b) $\lim\frac{\sqrt{n^2+n}-3n}{1-2n}=\lim\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}-3}{\frac{1}{n}-2}=1$

c) $\lim(n^2-4n+1)=\lim n^2\left(1-\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}\right)=+\infty$

• ***Nhân lượng liên hợp****: Dùng các hằng đẳng thức*

$$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)=a-b;\ \left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)=a-b$$

VD: $\lim\left(\sqrt{n^2+3n}-n\right)=\lim\frac{\left(\sqrt{n^2+3n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+3n}+n\right)}{\left(\sqrt{n^2+3n}+n\right)}=\lim\frac{3n}{\sqrt{n^2+3n}+n}=\frac{3}{2}$

• ***Dùng định lí kẹp****: Nếu* $\lvert u_n\rvert\le v_n$, *∀n và lim v_n = 0 thì lim u_n = 0*

VD: a) Tính $\lim \frac{\sin n}{n}$.

Vì $0 \le \left|\frac{\sin n}{n}\right| \le \frac{1}{n}$ *và* $\lim \frac{1}{n} = 0$ *nên* $\lim \frac{\sin n}{n} = 0$

b) Tính $\lim \frac{3\sin n - 4\cos n}{2n^2+1}$.

Vì $|3\sin n - 4\cos n| \le \sqrt{(3^2+4^2)(\sin^2 n + \cos^2 n)} = 5$

nên $0 \le \left|\frac{3\sin n - 4\cos n}{2n^2+1}\right| \le \frac{5}{2n^2+1}$.

Mà $\lim \frac{5}{2n^2+1} = 0$ *nên* $\lim \frac{3\sin n - 4\cos n}{2n^2+1} = 0$

Khi tính các giới hạn dạng phân thức, ta chú ý một số trường hợp sau đây:

- *Nếu bậc của tử nhỏ hơn bậc của mẫu thì kết quả của giới hạn đó bằng 0.*
- *Nếu bậc của tử bằng bậc của mẫu thì kết quả của giới hạn đó bằng tỉ số các hệ số của luỹ thừa cao nhất của tử và của mẫu.*
- *Nếu bậc của tử lớn hơn bậc của mẫu thì kết quả của giới hạn đó là* $+\infty$ *nếu hệ số cao nhất của tử và mẫu cùng dấu và kết quả là* $-\infty$ *nếu hệ số cao nhất của tử và mẫu trái dấu(ta thường đặt nhân tử chung của tử, mẫu riêng).*

Bài 1: Tính các giới hạn sau: (**Chia cả tử và mẫu cho n^a với số mũ a cao nhất Hoặc đặt nhân tử chung**)

1) $\lim(n^2 - n + 1)$. ĐS: $+\infty$

2) $\lim(-n^2 + n + 1)$. ĐS: $-\infty$

3) $\lim\sqrt{2n^2 - 3n - 8}$ ĐS: $+\infty$

4) $\lim\sqrt[3]{1 + 2n - n^3}$ ĐS: $-\infty$

5) $\lim(2n + \cos n)$. ĐS: $+\infty$

6) $\lim(\frac{1}{2}n^2 - 3\sin 2n + 5)$. ĐS: $+\infty$

7) $u_n = \frac{3^n+1}{2^n-1}$. ĐS: $+\infty$

8) $u_n = 2^n - 3^n$. ĐS: $-\infty$

9) $\lim\frac{2n+1}{n^3+4n^2+3}$ ĐS: 0

10) $\lim\frac{n^2+1}{2n^4+n+1}$ ĐS: 0

11) $\lim\frac{n^2+1}{2n^4+n+1}$ ĐS: 0

12) $\lim\frac{2n^2-n+3}{3n^2+2n+1}$ ĐS: 2/3

13) $\lim\frac{3n^3+2n^2+n}{n^3+4}$ ĐS: 3

14) $\lim\frac{n^4}{(n+1)(2+n)(n^2+1)}$ ĐS: 1

15) $\lim\frac{-n^2+n-1}{2n^2-1}$ ĐS: -1/2

16) $\lim\frac{\sqrt{4n-1}}{\sqrt{n}+1}$ ĐS: 2

17) $\lim\frac{2n-3}{\sqrt[3]{n^3-2n}+1}$ ĐS: 2

18) $\lim\frac{2n^4+n^2-3}{3n^3-2n^2+1}$ ĐS: $+\infty$

19) $\lim\frac{3n^3+2n^2+n}{4-n^2}$ ĐS: $-\infty$

20) $\lim\frac{-4n^2+2n+5}{3n+1}$ ĐS: $-\infty$

Bài 2: Tính các giới hạn sau: (**Chia cho lũy thừa có cơ số lớn nhất**)

1) $\lim\frac{1+3^n}{4+3^n}$ ĐS: 1

2) $\lim\frac{4.3^n+7^{n+1}}{2.5^n+7^n}$ ĐS: 7

3) $\lim\frac{4^{n+1}+6^{n+2}}{5^n+8^n}$ ĐS: 0

4) $\lim\frac{2^n+5^{n+1}}{1+5^n}$ ĐS: 5

5) $\lim\frac{1+2.3^n-7^n}{5^n+2.7^n}$ ĐS: -1/2

6) $\lim\frac{1-2.3^n+6^n}{2^n(3^{n+1}-5)}$ ĐS: 1/3

Bài 3: Tính các giới hạn sau: (**Tử ở dạng vô cùng ±vô cùng; Mẫu ở dạng vô cùng + vô cùng ;bậc của tử và mẫu bằng nhau thì ta chia cho số mũ cao nhất của tử hoặc mẫu)**

Chú ý: $\sqrt{n^k}$ có mũ $\frac{k}{2}$; $\sqrt[3]{n^k}$ có mũ $\frac{k}{3}$

1) $\lim \frac{\sqrt{4n^2+1}+2n-1}{\sqrt{n^2+4n+1}+n}$ ĐS: 2

2) $\lim \frac{\sqrt{n^2+3}-n-4}{\sqrt{n^2+2}+n}$ ĐS: 0

3) $\lim \frac{n^2+\sqrt[3]{1-n^6}}{\sqrt{n^4+1}+n^2}$ ĐS: 0

4) $\lim \frac{\sqrt{4n^2+1}+2n}{\sqrt{n^2+4n+1}+n}$ ĐS: 2

5) $\lim \frac{(2n\sqrt{n}+1)(\sqrt{n}+3)}{(n+1)(n+2)}$ ĐS: 2

6) $\lim \frac{\sqrt{n^2-4n}-\sqrt{4n^2+1}}{\sqrt{3n^2+1}+n}$ ĐS: -1/($\sqrt{3}+1$)

Bài 4: Tính các giới hạn sau:

Nếu bài toán có dạng: + Vô cùng – vô cùng không có mẫu (hệ số của n bậc cao nhất giống nhau).

+ Cả tử và mẫu ở dạng: Vô cùng- vô cùng. (hệ số của bậc cao nhất giống nhau)

Thì ta nhân liên hợp có căn bậc 2,3 rồi chia cho lũy thừa có số mũ cao nhất

Nếu bài toán ở dạng vô cùng + vô cùng thì kq là vô cùng ta đặt nhân tử chung có mũ cao nhất rồi tính giới hạn. Hoặc hệ số của n bậc cao nhất khác nhau ta chia hoặc đặt nhân tử chung.

1) $\lim(\sqrt{n^2+3n}+n)$ ĐS: $+\infty$

2) $\lim(\sqrt{n^2-2n}-n+2013)$ ĐS: 2012

3) $\lim\left(\sqrt{n^2-n}-n\right)$ ĐS: -1/2

4) $\lim(\sqrt{n^2+1}-n+5)$ ĐS: 5

5) $\lim(\sqrt{n^2+2013}-n+5)$ ĐS: 5

6) $\lim\left(\sqrt{n^2+2n}-n-1\right)$ ĐS: 0

7) $\lim\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+2}\right)$ ĐS: 1/2

8) $\lim\left(\sqrt[3]{2n-n^3}+n-1\right)$ ĐS: -1

9) $\lim\left(1+n^2-\sqrt{n^4+3n+1}\right)$ ĐS: 1

10) $\lim \frac{\sqrt{n^2-4n}-\sqrt{4n^2+1}}{\sqrt{3n^2+1}-n}$ ĐS: -1/($\sqrt{3}-1$)

11) $\lim \frac{1}{\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+4}}$ ĐS: $-\infty$

12) $\lim \frac{\sqrt{4n^2+1}-2n-1}{\sqrt{n^2+4n+1}-n}$ ĐS: -1/2

13) $\lim \frac{n^2+\sqrt[3]{1-n^6}}{\sqrt{n^4+1}-n^2}$ ĐS: 0

II. Giới hạn của hàm số

Giới hạn hữu hạn	Giới hạn vô cực, giới hạn ở vô cực
1. Giới hạn đặc biệt: $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$; $\lim\limits_{x\to x_0} c = c$ *(c: hằng số)* ***2. Định lí:*** *a) Nếu* $\begin{cases}\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L\\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=M\end{cases}$ *thì:* * $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)+g(x)\right]=L+M$ * $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)-g(x)\right]=L-M$ * $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x).g(x)\right]=L.M$ * $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{L}{M}$ *(nếu $M\neq 0$)*	***1. Giới hạn đặc biệt:*** $\lim\limits_{x\to+\infty} x^k=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} x^k=\begin{cases}+\infty & \text{nếu } k \text{ chẵn}\\ -\infty & \text{nếu } k \text{ lẻ}\end{cases}$ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} c=c$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{c}{x^k}=0$ $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$ $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{\lvert x\rvert}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{\lvert x\rvert}=+\infty$ ***2. Định lí:*** *a) Nếu* $\begin{cases}\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L\neq 0\\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\pm\infty\end{cases}$ *thì:*

b) Nếu $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L \end{cases}$ *thì* $* L \geq 0$ $* \lim\limits_{x\to x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$ *c) Nếu* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ *thì* $\lim\limits_{x\to x_0} \lvert f(x)\rvert = \lvert L\rvert$ ***3. Giới hạn một bên:*** $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = L$	$* \lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = \begin{cases} +\infty \text{ nếu } L.\lim\limits_{x\to x_0} g(x) > 0 \\ -\infty \text{ nếu } L.\lim\limits_{x\to x_0} g(x) < 0 \end{cases}$ $* \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ *b) Nếu* $\begin{cases} \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L \neq 0 \\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0 \end{cases}$ *thì:* $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} +\infty \text{ nếu } L.g(x) > 0 \\ -\infty \text{ nếu } L.g(x) < 0 \end{cases}$ *Khi tính giới hạn có một trong các dạng vô định:* $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0.\infty$ *thì phải tìm cách khử dạng vô định.*

Một số phương pháp khử dạng vô định:

1. Dạng $\dfrac{0}{0}$

a) L = $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ ***với P(x), Q(x) là các đa thức và*** $P(x_0) = Q(x_0) = 0$

Phân tích cả tử và mẫu thành nhân tử và rút gọn.

VD: $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-8}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+2)} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+2x+4}{x+2} = \dfrac{12}{4} = 3$

b) L = $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ ***với*** $P(x_0) = Q(x_0) = 0$ ***và P(x), Q(x) là các biểu thức chứa căn cùng bậc***

Sử dụng các hằng đẳng thức để nhân lượng liên hợp ở tử và mẫu.

VD: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2-\sqrt{4-x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\left(2-\sqrt{4-x}\right)\left(2+\sqrt{4-x}\right)}{x\left(2+\sqrt{4-x}\right)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{2+\sqrt{4-x}} = \dfrac{1}{4}$

c) L = $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ ***với*** $P(x_0) = Q(x_0) = 0$ ***và P(x) là biêu thức chứa căn không đồng bậc***

Giả sử: P(x) = $\sqrt[m]{u(x)} - \sqrt[n]{v(x)}$ *với* $\sqrt[m]{u(x_0)} = \sqrt[n]{v(x_0)} = a$.

Ta phân tích P(x) = $\left(\sqrt[m]{u(x)} - a\right) + \left(a - \sqrt[n]{v(x)}\right)$.

VD: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt{1-x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x} + \dfrac{1-\sqrt{1-x}}{x}\right)$

$= \lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1} + \dfrac{1}{1+\sqrt{1-x}}\right) = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{6}$

2. Dạng $\dfrac{\infty}{\infty}$***: L =*** $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ ***với P(x), Q(x) là các đa thức hoặc các biểu thức chứa căn.***

– Nếu P(x), Q(x) là các đa thức thì chia cả tử và mẫu cho luỹ thừa cao nhất của x.

– Nếu P(x), Q(x) có chứa căn thì có thể chia cả tử và mẫu cho luỹ thừa cao nhất của x hoặc nhân lượng liên hợp.

VD: a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x^2+5x-3}{x^2+6x+3} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^2}}{1+\frac{6}{x}+\frac{3}{x^2}} = 2$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-3}{\sqrt{x^2+1}-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2-\frac{3}{x}}{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1}=-1$

3. Dạng $\infty-\infty$: Giới hạn này thường có chứa căn

Ta thường sử dụng phương pháp nhân lượng liên hợp của tử và mẫu.

VD: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}=0$

4. Dạng $0.\infty$:

Ta cũng thường sử dụng các phương pháp như các dạng ở trên.

VD: $\lim\limits_{x\to2^+}(x-2)\sqrt{\dfrac{x}{x^2-4}}=\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{\sqrt{x-2}.\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}}=\dfrac{0.\sqrt{2}}{2}=0$

Bài 1: Tìm các giới hạn sau:

+ Khi thay x=a vào f(x) thấy mẫu khác 0 thì giới hạn bằng f(a).
+ Khi thay x=a vào f(x) thấy mẫu bằng 0 tử khác 0 thì giới hạn bằng ∞.

1) $\lim\limits_{x\to3}(x^2+x)$. ĐS: 12

2) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x}{x-1}$ ĐS: $\pm\infty$

3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+x+x^2+x^3}{1+x}$ ĐS: 1

4) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sqrt{3x^2+1}-x}{x-1}$ ĐS: -3/2

5) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{x}$ ĐS: $\sqrt{2}/\pi$

6) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{|x-1|}{x^4+x-3}$ ĐS:-2/3

7) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}}{x-1}$ ĐS: $\sqrt{3}$

8) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x^2-2x+3}}{x+1}$ ĐS: $\sqrt{2}/2$

9) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x+8}-3}{x-2}$ ĐS: 0

10) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt[3]{3x^2-4}-\sqrt{3x-2}}{x+1}$ ĐS: 0

11) $\lim\limits_{x\to0}x^2\sin\dfrac{1}{2}$ ĐS: 0

Bài 2: Tìm các giới hạn sau: (Khi thay x=a vào f(x) thấy tử =0; mẫu =0 ta rút gọn mất nhân tử rồi thay tiếp tới khi mẫu khác 0 là xong) còn nếu mẫu =0 tử khác 0 thì kq là ∞

1) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$ ĐS: 2

2) $\lim\limits_{x\to0}x\left(2-\dfrac{1}{x}\right)$ ĐS: -1

3) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-8}{x^2-4}$. ĐS: 3

4) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^2-4x+1}{x-1}$ ĐS: 2

5) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2x^2-3x-2}{x-2}$ ĐS: 5

6) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^4-16}{x^3+2x^2}$ ĐS: -8

7) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^2-3x+2}$ ĐS: 0

8) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-3x^2+5x-3}{x^2-1}$ ĐS:1

9) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{1+x+x^2+x^3}{1+x}$ ĐS: 2

10) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^3-5x^2+3x+9}{x^4-8x^2-9}$ ĐS: 0

11) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^5+1}{x^3+1}$ ĐS: 5/3

12) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-5x^5+4x^6}{(1-x)^2}$ ĐS: 10

13) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{4x^6-5x^5+x}{x^2-1}$ ĐS: 0

14) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$ ĐS: -1/2

Bài 3: Tìm các giới hạn sau: (**Một căn bậc 2**)

1) $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{4x+1}-3}{x^2-4}$ ĐS:1/6

2) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$ ĐS:0

3) $\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x+5}-3}{4-x}$ ĐS: -1/6

4) $\lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{9x-x^2}$ ĐS:-1/54

5) $\lim_{x\to 7}\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$ ĐS: -1/56

6) $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{2x+7}+x-4}{x^3-4x^2+3}$ ĐS: -4/15

7) $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-\sqrt{3x-2}}{x^2-1}$ ĐS: 9/4

8) $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+3}+x^3-3x}{x-1}$ ĐS:1/2

Bài 4: Tìm các giới hạn sau: **(giống giới hạn dãy số chia cho mũ cao nhất, nhân liên hợp,Đặt nhân tử, dấu giá trị tuyệt đối)**

1) $\lim_{x\to-\infty}(3x^3-5x^2+7)$ ĐS: -∞

2) $\lim_{x\to+\infty}(2x^3-3x)$ ĐS:+ ∞

3) $\lim_{x\to\pm\infty}(2x^3-3x)$ ĐS:± ∞

4) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{2x^4-3x+12}$.ĐS:+ ∞

5) $\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt{x^2-3x+4}$ ĐS:± ∞

6) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-5}{x^2+1}$ ĐS:+ ∞

7) $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3-x}{x^2+2}$ ĐS:+ ∞

8) $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{x-1}$ ĐS:2

9) $\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^4-2x^5}{5x^4+x+4}$ ĐS:+ ∞

10) $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+1}{1-3x-5x^2}$ ĐS:-1/5

11) $\lim_{x\to-\infty}\frac{3x(2x^2-1)}{(5x-1)(x^2+2x)}$ ĐS:6/5

12) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{x}+1}{x^2+x+1}$ ĐS:0

13) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x^2+1}}{3x-1}$ ĐS:-2/3; 2/3

14) $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^4-x}}{1-2x}$ ĐS:+ ∞

15) $\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|+\sqrt{x^2+x}}{x+10}$ ĐS:-2

16) $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-3x}+2x}{3x-1}$ ĐS:1/3

17) $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt{x^2+x+2}+3x+1}{\sqrt{4x^2+1}+1-x}$ ĐS:4; -2/3

18) $\lim_{x\to+\infty}(x+5)\sqrt{\frac{x}{x^3-1}}$ ĐS:1

19) $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{2x^2-7x+12}}{3|x|-17}$ ĐS: $\sqrt{2}/3$

20) $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^4+4}}{x+4}$ ĐS:-∞

21) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2x^4+x^2-1}}{1-2x}$ ĐS:- ∞

22) $\lim_{x\to\infty}\frac{x+2}{\sqrt{x^2+2}}$ ĐS:-1;1

23) $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3+2x^2}+x}{2x-2}$ ĐS:1

15) $\lim_{x\to-2}\frac{x^2+2x}{x^2+4x+4}$ ĐS: ±∞

24) $\lim_{x\to 1}\left[\frac{2}{(x-1)^2}.\frac{2x+1}{2x-3}\right]$ ĐS:- ∞

25) $\lim_{x\to 1}\frac{5}{(x-1)(x^2-3x+2)}$ ĐS:- ∞

26) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)$. ĐS:- ∞

27) $\lim_{x\to 1^+}\frac{x^4-1}{x^3-2x^2+x}$ ĐS: +∞

28) $\lim_{x\to 2^-}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x^2-4}\right)$ ĐS:- ∞

29) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{2x^2-x+1}$ ĐS:1/2

30) $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2-x+1}{x-2}$ ĐS:-∞;+ ∞

31) $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+1}{x^3-3x^2+2}$ ĐS:0

32) $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt{x^2+2x+3}+4x+1}{\sqrt{4x^2+1}+2-x}$ ĐS:-1;5

33) $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt{4x^2-2x+1}+2-x}{\sqrt{9x^2-3x}+2x}$ ĐS:3;1/5

34) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(2x-1)\sqrt{x^2-3}}{x-5x^2}$ ĐS:2/5

35) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2x}+3x}{\sqrt{4x^2+1}-x+2}$ ĐS:4

36) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-5x+2}{2|x|+1}$ ĐS:+ ∞

37) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2+x-10}{9-3x^3}$ ĐS:0

Bài 5: Tìm các giới hạn sau: (Để ý đến dấu các biểu thức tử và mẫu khi tính giới hạn này)

1) $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{x-15}{x-2}$ ĐS:- ∞

2) $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{x-15}{x-2}$ ĐS:+ ∞

3) $\lim\limits_{x\to3^+}\dfrac{1+3x-2x^2}{x-3}$ ĐS:- ∞

4) $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x-2}$ ĐS:+ ∞

5) $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{|2-x|}{2x^2-5x+2}$ ĐS:1/3

6) $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{|2-x|}{2x^2-5x+2}$ ĐS:-1/3

7) $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{x^2-2x}{3x+1}$ ĐS:0

8) $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{3x-1}{2}$ ĐS:5/2

9) $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{|x-1|}{x-1}$ ĐS:1

10) $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{|x-1|}{x-1}$ ĐS:-1

11) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sqrt{x^2+x^3}}{2x}$ ĐS:1/2

12) $\lim\limits_{x\to0^\pm}\dfrac{2x}{\sqrt{4x^2+x^3}}$ ĐS:-1;1

13) $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{x^2-3x+3}{x-2}$ ĐS:- ∞

14) $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{x^2-3x+3}{x-2}$ ĐS:+ ∞

15) $\lim\limits_{x\to4^\pm}\dfrac{x-3}{x-4}$ ĐS:- ∞;+∞

16) $\lim\limits_{x\to-2^-}\dfrac{x^2-3x+3}{x^2+x-2}$ ĐS:+ ∞

17) $\lim\limits_{x\to-2^+}\dfrac{x^2-3x+3}{x^2+x-2}$ ĐS:- ∞

18) $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\sqrt{x^3-3x+2}}{x^2-5x+4}$ ĐS: $\sqrt{3}/3$

19) $\lim\limits_{x\to0^\pm}\left(x\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}\right)$ ĐS:0;0

20) $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\sqrt{x^2+x-2}}{x-1}$ ĐS:+∞

Bài 6: Tìm các giới hạn một bên của hàm số tại điểm được chỉ ra: (Giới hạn một bên tiến tới 1 số)

1) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{9-x^2}{x-3} & khi\ x<3\\ 1-x & khi\ x\ge 3\end{cases}$ $tại\ x=3$ ĐS:-6;-2; ko xđ

2) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-2x}{8-x^3} & khi\ x>2\\ \dfrac{x^4-16}{x-2} & khi\ x<2\end{cases}$ $tại\ x=2$ ĐS:-1/6; 32; K xđ

3) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1} & khi\ x>1\\ -\dfrac{x}{2} & khi\ x\le 1\end{cases}$ $tại\ x=1$ ĐS:-1/2; -1/2; -1/2

4) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1} & khi\ x>0\\ \dfrac{3}{2} & khi\ x\le 0\end{cases}$ $tại\ x=0$ ĐS:3/2;3/2;3/2

Bài 7: Tìm giá trị của ***m*** để các hàm số sau có giới hạn tại điểm được chỉ ra:

1) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-1}{x-1} & khi\ x<1\\ mx+2 & khi\ x\ge 1\end{cases}$ $tại\ x=1$ ĐS:m=1

2) $f(x)=\begin{cases}x+m & khi\ x<0\\ \dfrac{x^2+100x+3}{x+3} & khi\ x\ge 0\end{cases}$ $tại\ x=0$ ĐS:m=1

3) $f(x)=\begin{cases}x+3m & khi\ x<-1\\ x^2+x+m+3 & khi\ x\ge -1\end{cases}$ $tại\ x=-1$ ĐS: m=2

4) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{3}{x^3-1} & khi\ x>1\\ m^2x^2-3mx+3 & khi\ x\le 1\end{cases}$ $tại\ x=1$ ĐS:m=1;m=2

III. Hàm số liên tục

1. Hàm số liên tục tại một điểm:

y = f(x) liên tục tại x_0 ⇔ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

• *Để xét tính liên tục của hàm số y = f(x) tại điểm x_0 ta thực hiện các bước:*

B1: Tính $f(x_0)$.

B2: Tính $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ *(trong nhiều trường hợp ta cần tính* $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$*)*

B3: So sánh $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ *với $f(x_0)$ và rút ra kết luận.*

2. Hàm số liên tục trên một khoảng: *y = f(x) liên tục tại mọi điểm thuộc khoảng đó.*

3. Hàm số liên tục trên một đoạn [a; b]*: y = f(x) liên tục trên khoảng (a; b) và* $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a),\ \lim\limits_{x\to b^-} f(x)=f(b)$

4. • *Hàm số đa thức liên tục trên R.*

• *Hàm số phân thức, các hàm số lượng giác liên tục trên từng khoảng xác định của chúng.*

5. *Giả sử y = f(x), y = g(x) liên tục tại điểm x_0. Khi đó:*

• *Các hàm số y = f(x) + g(x), y = f(x) – g(x), y = f(x).g(x) liên tục tại x_0.*

• *Hàm số y =* $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ *liên tục tại x_0 nếu $g(x_0)\neq 0$.*

6. *Nếu y = f(x) liên tục trên [a; b] và f(a). f(b)< 0 thì tồn tại ít nhất một số c ∈ (a; b): f(c) = 0.*

Nói cách khác: *Nếu y = f(x) liên tục trên [a; b] và f(a). f(b)< 0 thì phương trình f(x) = 0 có ít nhất một nghiệm c ∈ (a; b).*

Mở rộng:

Nếu y = f(x) liên tục trên [a; b]. Đặt m = $\min\limits_{[a;b]} f(x)$ *,M =* $\max\limits_{[a;b]} f(x)$ *Khi đó với mọi T ∈ (m; M) luôn tồn tại ít nhất một số c ∈ (a; b) sao cho f(c) = T.*

Bài 1: Xét tính liên tục của hàm số tại điểm được chỉ ra:

1) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+3}{x-1} & khi\ x\neq 1\\ -1 & khi\ x=1\end{cases}$ $tại\ x=-1$ ĐS: LT

2) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} & khi\ x\neq 1\\ \dfrac{1}{4} & khi\ x=1\end{cases}$ $tại\ x=1$ ĐS:Lt

3) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - x - 6}{x^2 - x - 2} & \text{khi } x \neq 2 \\ \dfrac{11}{3} & \text{khi } x = 2 \end{cases}$ tại $x_o = 2$ ĐS: Lt

4) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \sqrt{2x-3}}{2-x} & \text{khi } x \neq 2 \\ 1 \text{ khi } x = 2 \end{cases}$ tại $x_o = 2$ ĐS:Lt

5) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2 - 7x + 5x^2 - x^3}{x^2 - 3x + 2} & khi\, x \neq 2 \\ 1 & khi\ x = 2 \end{cases}$ $tại\ x = 2$ ĐS:Lt

6) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 4 & \text{khi } x < 1 \\ 2x - 3 & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$ tại $x_o = 1$ĐS:K Lt

7) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{4 - x^2}{x - 2} & \text{khi } x < 2 \\ 1 - 2x & \text{khi} x > 2 \end{cases}$ tại $x_o = 2$ ĐS:K Lt

8) $f(x) = \begin{cases} x + \dfrac{3}{2} & \text{khi } x \leq 0 \\ \dfrac{\sqrt{x+1} - 1}{\sqrt[3]{1+x} - 1} & \text{khi } x > 0 \end{cases}$ tại $x_o = 0$ ĐS: Lt

9) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x - 5}{\sqrt{2x-1} - 3} & khi\ x > 5 \\ (x-5)^2 + 3 & khi\, x \leq 5 \end{cases}$ $tại\ x = 5$ ĐS:Lt

10) $f(x) = \begin{cases} 1 - \cos x & khi\, x \leq 0 \\ \sqrt{x+1} & khi\ x > 0 \end{cases}$ $tại\ x = 0$ ĐS:K Lt

11) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x - 1}{\sqrt{2-x} - 1} & khi\ x < 1 \\ -2x & khi\ x \geq 1 \end{cases}$ $tại\ x = 1$ ĐS:Lt

Bài 2: Tìm ***m, n,a*** để hàm số liên tục tại điểm được chỉ ra:

1) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x - 1} & khi\ x \neq 1 \\ 3x + m & khi\ x = 1 \end{cases}$ $tại\ x = 1$ ĐS:m=0

2) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + 2x - 3}{x^2 - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ a & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ tại $x_0 = 1$ ĐS:a=5/2

3) $f(x) = \begin{cases} x^2 & khi\ x < 1 \\ 2mx - 3 & khi\ x \geq 1 \end{cases}$ $tại\ x = 1$ ĐS:m=2

4) $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 2x - 1 & \text{khi } x < 1 \\ 2x + a & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$ tại $x_0 = 1$ĐS:a=2

5) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{x} & \text{khi}\, x < 0 \\ a + \dfrac{4 - x}{x + 2} & \text{khi}\, x \geq 0 \end{cases}$ tại $x_o = 0$ ĐS:a=-3

6) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt[3]{3x+2} - 2}{x - 2} & \text{khi } x > 2 \\ ax + \dfrac{1}{4} & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$ tại $x_0 = 2$ ĐS:a=0

Bài 3: Chứng minh rằng các phương trình sau luôn có nghiệm:

a) $x^3 - 2x - 7 = 0$ ĐS: f(x) liên tục trên R và f(0).f(3)<0

b) $x^5 + x^3 - 1 = 0$ ĐS: f(0).f(1)<0

c) $x^3 + x^2 + x + 2/3 = 0$ ĐS: f(-1).f(0)<0

d) $x^3 - 6x^2 + 9x - 10 = 0$ ĐS: f(0).f(5)<0

e) $x^5 + 9x^2 + x + 2 = 0$ ĐS: f(-3).f(0)<0

f) $\cos x - x + 1 = 0$ ĐS: f(0).f(3)<0

g) $x^5 - 3x + 3 = 0$ ĐS: f(-2).f(0)<0

h) $x^5 + x - 1 = 0$ ĐS: f(0).f(1)<0

i) $x^4 + x^3 - 3x^2 + x + 1 = 0$ ĐS: f(-2).f(0)<0