I. VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

I. CHUẨN KIẾN THỨC.

1. Các đẳng thức Vectơ.

+ **Qui tắc ba điểm:** Cho ba điểm A, B, C bất kỳ, ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

+ **Qui tắc trừ:** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$

+ **Qui tắc hình bình hành:** Cho hình bình hành ABCD, ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$

+ **Qui tắc hình hộp:** Cho hình hộp ABCD.A′B′C′D′, ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$

+ **Hê thức trung điểm đoạn thẳng:** Cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB, O tuỳ ý.

Ta có: $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$; $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OI}$

+ **Hệ thức trọng tâm tam giác:** Cho G là trọng tâm của tam giác ABC, O tuỳ ý. Ta có:

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0};\quad \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OG}$$

+ **Hệ thức trọng tâm tứ diện:** Cho G là trọng tâm của tứ diện ABCD, O tuỳ ý. Ta có:

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0};\quad \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=4\overrightarrow{OG}$$

+ **Điều kiện hai vectơ cùng phương:** $\vec{a}\ và\ \vec{b}\ cùng\ phương\,(\vec{a}\neq\vec{0})\Leftrightarrow\exists!k\in R:\vec{b}=k\vec{a}$

+ Điểm M chia đoạn thẳng AB theo tỉ số k (k ≠ 1), O tuỳ ý. Ta có:

$$\overrightarrow{MA}=k\overrightarrow{MB};\quad \overrightarrow{OM}=\frac{\overrightarrow{OA}-k\overrightarrow{OB}}{1-k}$$

2. Sự đồng phẳng của ba vectơ

- Ba vectơ được gọi là đồng phẳng nếu các giá của chúng cùng song song với một mặt phẳng.
- **Điều kiện để ba vectơ đồng phẳng:** Cho ba vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, trong đó $\vec{a}\ và\ \vec{b}$ không cùng phương.

Khi đó: $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng ⇔ ∃! m, n ∈ R: $\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$

- Cho ba vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ không đồng phẳng, $\vec{x}$ tuỳ ý.

Khi đó: ∃! m, n, p ∈ R: $\vec{x}=m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}$

3. Tích vô hướng của hai vectơ

- **Góc giữa hai vectơ trong không gian:**

$$\overrightarrow{AB}=\vec{u},\overrightarrow{AC}=\vec{v}\Rightarrow(\vec{u},\vec{v})=BAC\ (0^0\leq BAC\leq 180^0)$$

- **Tích vô hướng của hai vectơ trong không gian:**

+ Cho $\vec{u},\vec{v}\neq\vec{0}$. Khi đó: $\vec{u}.\vec{v}=|\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos(\vec{u},\vec{v})$

+ Với $\vec{u}=\vec{0}\ hoặc\ \vec{v}=\vec{0}$. Qui ước: $\vec{u}.\vec{v}=0$

+ $\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}.\vec{v}=0$

VẤN ĐỀ 1: CHỨNG MINH MỘT ĐẲNG THỨC VECTƠ.

*** Các kỹ năng cần đạt.**

- Nhận dạng nhanh các kiến thức.

- Biến đổi linh hoạt, mềm dẻo để đưa về các dạng đã học, các đẳng thức đã biết.

- Tìm lời giải gọn, nhẹ. Có tính phát triển cho quá trình học lớp 12.

Bài 1: Cho tứ diện ABCD. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB và CD, I là trung điểm của EF.

a) Chứng minh: $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\vec{0}$.

b) Chứng minh: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MI}$, với M tuỳ ý.

Bài 2: Chứng minh rằng với 4 điểm A, B, C, D bất kì, ta luôn có: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}=\vec{0}$

Bài 3: cho hình chóp S. ABCD có đáy ABCD là hình bình hành tâm O. Chứng minh rằng:

a. $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}$.

b. Tính tổng: $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD}$

VẤN ĐỀ 2: CHỨNG MINH BA VECTƠ ĐỒNG PHẲNG.
PHÂN TÍCH MỘT VEC TƠ THEO BA VECTƠ KHÔNG ĐỒNG PHẲNG CHO TRƯỚC

- *Để chứng minh ba vectơ đồng phẳng, ta có thể chứng minh bằng một trong các cách:*
  + Chứng minh các giá của ba vectơ cùng song song với một mặt phẳng.
  + Dựa vào điều kiện để ba vectơ đồng phẳng:
  Nếu có m, n $\in$ R: $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$ *thì* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng
- *Để phân tích một vectơ* $\vec{x}$ *theo ba vectơ* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ *không đồng phẳng, ta tìm các số m, n, p sao cho:* $\vec{x} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$

Bài 1: Cho tam giác ABC. Lấy điểm S nằm ngoài mặt phẳng (ABC). Trên đoạn SA lấy điểm M sao cho $\overrightarrow{MS} = -2\overrightarrow{MA}$ và trên đoạn BC lấy điểm N sao cho $\overrightarrow{NB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{NC}$. Chứng minh rằng ba vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{SC}$ đồng phẳng.

HD: Chứng minh $\overrightarrow{MN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{SC}$.

Bài 2: Cho hình hộp ABCD.EFGH. Gọi M, N, I, J, K, L lần lượt là trung điểm của các cạnh AE, CG, AD, DH, GH, FG; P và Q lần lượt là trung điểm của NG và JH.

a) Chứng minh ba vectơ $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{FH}, \overrightarrow{PQ}$ đồng phẳng.

b) Chứng minh ba vectơ $\overrightarrow{IL}, \overrightarrow{JK}, \overrightarrow{AH}$ đồng phẳng.

HD: a) $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{FH}, \overrightarrow{PQ}$ *có giá cùng song song với (ABCD).*

b) $\overrightarrow{IL}, \overrightarrow{JK}, \overrightarrow{AH}$ *có giá cùng song song với (BDG).*

Bài 3: Cho tứ diện OABC. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC.

a) Phân tích vectơ $\overrightarrow{OG}$ theo các ba $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$.

b) Gọi D là trọng tâm của tứ diện OABC. Phân tích vectơ $\overrightarrow{OD}$ theo ba vectơ $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$.

HD: a) $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$ *b)* $\overrightarrow{OD} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$.