

CHƯƠNG IV: GIỚI HẠN

A. MỘT SỐ LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. Giới hạn của dãy số

Giới hạn hữu hạn	Giới hạn vô cực
<p>1. Giới hạn đặc biệt:</p> $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^k} = 0 \quad (k \in \mathbb{N}^+)$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0 \quad (q < 1); \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} C = C$ <p>2. Định lý:</p> <p>a) Nếu $\lim u_n = a, \lim v_n = b$ thì</p> <ul style="list-style-type: none"> • $\lim (u_n + v_n) = a + b$ • $\lim (u_n - v_n) = a - b$ • $\lim (u_n \cdot v_n) = a \cdot b$ • $\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{a}{b}$ (nếu $b \neq 0$) <p>b) Nếu $u_n \geq 0, \forall n$ và $\lim u_n = a$ thì $a \geq 0$ và $\lim \sqrt{u_n} = \sqrt{a}$</p> <p>c) Nếu $u_n \leq v_n, \forall n$ và $\lim v_n = 0$ thì $\lim u_n = 0$</p> <p>d) Nếu $\lim u_n = a$ thì $\lim u_n = a$</p> <p>3. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn</p> $S = u_1 + u_1q + u_1q^2 + \dots = \frac{u_1}{1-q} \quad (q < 1)$	<p>1. Giới hạn đặc biệt:</p> $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = +\infty \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n^k = +\infty \quad (k \in \mathbb{N}^+)$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty \quad (q > 1)$ <p>2. Định lý:</p> <p>a) Nếu $\lim u_n = +\infty$ thì $\lim \frac{1}{u_n} = 0$</p> <p>b) Nếu $\lim u_n = a, \lim v_n = \pm\infty$ thì $\lim \frac{u_n}{v_n} = 0$</p> <p>c) Nếu $\lim u_n = a \neq 0, \lim v_n = 0$ thì $\lim \frac{u_n}{v_n} = \begin{cases} +\infty & \text{nếu } a \cdot v_n > 0 \\ -\infty & \text{nếu } a \cdot v_n < 0 \end{cases}$</p> <p>d) Nếu $\lim u_n = +\infty, \lim v_n = a$ thì $\lim (u_n \cdot v_n) = \begin{cases} +\infty & \text{nếu } a > 0 \\ -\infty & \text{nếu } a < 0 \end{cases}$</p> <p>* Khi tính giới hạn có một trong các dạng vô định: $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty$ thì phải tìm cách khử dạng vô định.</p>

2. Giới hạn của hàm số

Giới hạn hữu hạn	Giới hạn vô cực, giới hạn ở vô cực
<p>1. Giới hạn đặc biệt:</p> $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0;$ $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c \quad (c: \text{hằng số})$ <p>2. Định lý:</p> <p>a) Nếu $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \\ \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = M \end{cases}$</p> <p>thì: * $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = L + M$</p> <p>* $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)] = L - M$</p> <p>* $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M$</p>	<p>1. Giới hạn đặc biệt:</p> $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^k = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = \begin{cases} +\infty & \text{nếu } k \text{ chẵn} \\ -\infty & \text{nếu } k \text{ lẻ} \end{cases}$ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} c = c; \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{c}{x^k} = 0$ $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{ x } = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{ x } = +\infty$ <p>2. Định lý:</p> <p>a) Nếu $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \neq 0 \\ \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty \end{cases}$ thì:</p>

<p>* $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$ (nếu $M \neq 0$)</p> <p>b) Nếu $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \end{cases}$ thì</p> <p>* $L \geq 0$ * $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$</p> <p>c) Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ thì</p> <p>$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$</p> <p>3. Giới hạn một bên:</p> <p>$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$</p> <p>$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$</p>	<p>* $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = \begin{cases} +\infty & \text{nếu } L \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) > 0 \\ -\infty & \text{nếu } L \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) < 0 \end{cases}$</p> <p>* $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$</p> <p>b) Nếu $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \neq 0 \\ \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 \end{cases}$ thì:</p> <p>$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} +\infty & \text{nếu } L \cdot g(x) > 0 \\ -\infty & \text{nếu } L \cdot g(x) < 0 \end{cases}$</p> <p>Khi tính giới hạn có một trong các dạng vô định: $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty$ thì phải tìm cách khử dạng vô định.</p>
--	--

3. Hàm số liên tục

<p>1. Hàm số liên tục tại một điểm:</p> <p style="text-align: center;">$y = f(x)$ liên tục tại $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$</p> <p>• Để xét tính liên tục của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 ta thực hiện các bước:</p> <p>B1: Tính $f(x_0)$.</p> <p>B2: Tính $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ (trong nhiều trường hợp ta cần tính $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$)</p> <p>B3: So sánh $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ với $f(x_0)$ và rút ra kết luận.</p> <p>2. Hàm số liên tục trên một khoảng: $y = f(x)$ liên tục tại mọi điểm thuộc khoảng đó.</p> <p>3. Hàm số liên tục trên một đoạn $[a; b]$: $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $(a; b)$ và $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$</p> <p>4. • Hàm số đa thức liên tục trên R.</p> <p>• Hàm số phân thức, các hàm số lượng giác liên tục trên từng khoảng xác định của chúng.</p> <p>5. Giả sử $y = f(x), y = g(x)$ liên tục tại điểm x_0. Khi đó:</p> <p>• Các hàm số $y = f(x) + g(x), y = f(x) - g(x), y = f(x) \cdot g(x)$ liên tục tại x_0.</p> <p>• Hàm số $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại x_0 nếu $g(x_0) \neq 0$.</p> <p>6. Nếu $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và $f(a) \cdot f(b) < 0$ thì tồn tại ít nhất một số $c \in (a; b): f(c) = 0$.</p> <p>Nói cách khác: Nếu $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và $f(a) \cdot f(b) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm $c \in (a; b)$.</p> <p>Mở rộng:</p> <p>Nếu $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$. Đặt $m = \min_{[a;b]} f(x), M = \max_{[a;b]} f(x)$ Khi đó với mọi $T \in (m; M)$ luôn tồn tại ít nhất một số $c \in (a; b)$ sao cho $f(c) = T$.</p>

B. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Tính các giới hạn của các dãy số sau:

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 2n + 5}{7n^2 + n - 8}$$

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^2 + n}{5n^2 + 2}$$

$$5. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + 1}{n + 2}$$

$$6. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 1}{n^2 + 4}$$

$$7. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^3 + 3n - 1}{7n^3 + 2n}$$

$$8. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 1} + 4n}{3n - 2}$$

$$9. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - 2} \right)$$

$$10. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3}{n^4 + 3n^2 + 2}$$

$$11. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n - 4}{7n^3 - 2n + 9}$$

$$12. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 2}}{\sqrt{4n^2 - 2}}$$

$$13. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + 2n + 3} - n \right)$$

$$14. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + 2n - 3} - n \right)$$

$$15. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \right)$$

Tính giới hạn các hàm số sau

$$1. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x + 3}{x^2 + 1}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x - 1}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x - 1}{2x^3 + 1}$$

$$9. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 3} - x \right)$$

Tìm các giới hạn sau:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} (x^3 + 4x^2 + 10)$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 3} (5x^2 - 7x)$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 5}{x + 5}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{(x - 2)^2}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 2x - 15}{x - 3}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 3x + 1}{x^2 - 1}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3}$$

HÀM SỐ LIÊN TỤC

1. Cho hàm số: $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & (x \neq 1) \\ a & (x = 1) \end{cases}$ a là hằng số. Xét tính liên tục của hàm số

tại $x_0 = 1$.

2. Cho hàm số: $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & (x > 0) \\ x & (x \leq 0) \end{cases}$. Xét tính liên tục của hàm số tại $x_0 = 0$.

3. Cho hàm số: $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 16}{x - 4} & (x \neq 4) \\ 8 & (x = 4) \end{cases}$ Xét tính liên tục của hàm số tại $x_0 = 4$.

4. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \sqrt{2x - 3}}{2 - x} & (x \neq 2) \\ 1 & (x = 2) \end{cases}$ Xét tính liên tục của hàm số tại $x_0 = 2$

Chứng minh rằng phương trình:

a) $3x^2 + 2x - 2 = 0$ có ít nhất một nghiệm

b) $4x^4 + 2x^2 - x - 3 = 0$ có ít nhất một nghiệm

c) $x^4 - x - 3 = 0$ có ít nhất một nghiệm

d) $2x^3 - 6x + 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm

C. MỘT SỐ ĐỀ ÔN LUYỆN

ĐỀ ÔN TẬP SỐ 1

I. TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

Câu 1: Kết quả của $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 2n + 5}{7n^2 + n - 8}$ là

A. $\frac{3}{7}$

B. $+\infty$

C. $-\frac{5}{8}$

D. 0

Câu 2: $\lim_{n \rightarrow \infty} (-3n^3 + 5n - 2)$ bằng

A. -3

B. $+\infty$

C. $-\infty$

D. 3

Câu 3: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 4 \cdot 7^n}{3 \cdot 7^n - 2}$ bằng

A. 1

B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{4}{3}$

D. -2

Câu 4: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x - 3}$ bằng

A. 0

B. $+\infty$

C. 4

D. $\frac{1}{4}$

Câu 5: $\lim_{x \rightarrow 0} (x^3 + 4x^2 + 10)$ bằng

- A. $+\infty$ B. 0 C. 10 D. 15

Câu 6: $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x+1}{x-2}$ bằng

- A. 2 B. $-\infty$ C. $+\infty$ D. 0

Câu 7: $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 3x + 1}{x^2 - 1}$ bằng

- A. $\frac{1}{2}$ B. 2 C. $-\infty$ D. $+\infty$

Câu 8: $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3 + 3x - 4)$ bằng

- A. $-\infty$ B. $+\infty$ C. -2 D. 2

Câu 9: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 5x + 1}{x^2 - 2}$ bằng

- A. $-\infty$ B. $+\infty$ C. 3 D. 0

Câu 10: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 1}$ bằng

- A. 0 B. $+\infty$ C. $-\infty$ D. $\frac{1}{2}$

Câu 11: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3 - 5x + 1}{x^2 + 2}$ bằng

- A. $+\infty$ B. 3 C. 0 D. $-\infty$

Câu 12: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{x \cdot \sqrt[3]{x^3 + 1}} \right) (3x^2 - x + 1)$ bằng

- A. 6 B. -3 C. $+\infty$ D. $\frac{3}{2}$

Câu 13: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{nêu } x > 1 \\ \frac{3-x}{2} & \text{nêu } x \leq 1 \end{cases}$, hàm số liên tục trên

- A. \emptyset B. $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$ C. $(-\infty; 1)$ D. $(1; +\infty)$

Câu 14: Hàm số $f(x) = \begin{cases} ax+2 & (x \geq 1) \\ x^2+x-1 & (x < 1) \end{cases}$ liên tục tại $x = 1$ khi

- A. $a = 1$ B. Không có a thỏa mãn. C. $a = 0$ D. $a = -1$

Câu 15: Phương trình $2x^3 - 6x + 1 = 0$ có số nghiệm thuộc $[-2; 2]$ là

A. 1

B. 2

C. 3

D. Vô nghiệm.

II. PHẦN TỰ LUẬN

Câu 1: a, Tính giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 2n + 1}{2n^3 - n + 3}$

b, Tính giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 3^n}{2^n + 4 \cdot 3^n}$.

Câu 2: a, $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$

b, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - x^2 - 1}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}$

c, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x + 3} - x)$

Câu 3: Chứng minh rằng phương trình $4x^4 + 2x^2 - x - 3 = 0$ có ít nhất hai nghiệm

Câu 4: Định m để hàm số liên tục $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 7x + 10}{x - 2} & \text{nêu } x \neq 2 \\ -2m - 1 & \text{nêu } x = 2 \end{cases}$ tại $x = 2$.

ĐỀ ÔN TẬP SỐ 2**A. TRẮC NGHIỆM**

Câu 1: Giới hạn của hàm số sau đây bằng bao nhiêu: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^k$ (với k nguyên dương)

A. $+\infty$

B. 0

C. 14

D. k

Câu 2: Giới hạn của hàm số sau đây bằng bao nhiêu: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x + 2}{(x - 2)^2}$

A. 0

B. 1

C. 2

D. $+\infty$

Câu 3: Giới hạn của hàm số sau đây bằng bao nhiêu: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - x)$

A. 0

B. $-\infty$

C. 1

D. 2

Câu 4: cho hàm số: $f(x) = \begin{cases} \frac{2x-1}{x} & \text{khi } x \geq 1 \\ \frac{x^2-x}{x-1} & \text{khi } x < 1 \end{cases}$ Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề sai?

A. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$ B. $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$ C. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$ D. Không tồn tại giới hạn của hàm số $f(x)$ khi x tiến tới 1.

Câu 5: Cho các hàm số: (I) $y = \sin x$; (II) $y = \cos x$; (III) $y = \tan x$; (IV) $y = \cot x$
 Trong các hàm số sau hàm số nào liên tục trên \mathbb{R} .

- A. (I) và (II) B. (III) và (IV) C. (I) và (III) D. (I), (II), (III) và (IV)

Câu 6: Cho hàm số $f(x)$ chưa xác định tại $x = 0$: $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x}$. Để $f(x)$ liên tục tại $x = 0$, phải gán cho $f(0)$ giá trị bằng bao nhiêu?

- A. -3 B. -2 C. -1 D. 0

B. TỰ LUẬN

Bài 1: (3 điểm) Tính giới hạn của các hàm số sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x-4}{x+1}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x + 1}{2x^2 + x + 1}$

c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{7x-10} - 2}{x-2}$

Bài 2: (2 điểm) Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2 - 11x + 6}{x-3} & \text{khi } x \neq 3 \\ m^2 - x^2 & \text{khi } x = 3 \end{cases}$ liên tục tại $x_0 = 3$.

Bài 3: (2 điểm) Chứng minh rằng phương trình:

$$x^5 + x^3 - 1 = 0 \text{ có ít nhất một nghiệm}$$

ĐỀ ÔN TẬP SỐ 3

I. Phần trắc nghiệm:

Câu 1: Biết giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^2 n^2 + 2n + 3}{n^2 + 1} = 4$. Khi đó giá trị của a là.

- A. 1 B. 2 C. 3 D. $a=2$ hoặc $a=-2$.

Câu 2: Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-2x+1}{x-1}$ ta được kết quả là:

- A. $-\infty$ B. $+\infty$ C. 0 D. 2

Câu 3: Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x-1}$ ta được kết quả là:

- A. -3 B. 1 C. 3 D. -2

Câu 4: Tìm a để giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 3x + 5} + ax) = +\infty$.

- A. $a=3$ B. $a=5$ C. $a > 1$ D. $a < 1$.

Câu 5: Tìm giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^3 + 2n - 2)$ ta được kết quả là:

- A. $+\infty$ B. 1 C. -2 D. 3

Câu 6: Tìm giới hạn: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3x + 2}{x-1}$ ta được kết quả là:

- A. -1 B. $+\infty$ C. $-\infty$ D. 2

Câu 7. Biết giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+1}{3-ax} = 5$. Tìm a?

A. $a = -2$

B. $a = -\frac{2}{5}$

C. $a = -\frac{5}{2}$

D. $a = \frac{2}{3}$

Câu 8: Tìm a để giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a \cdot 5^n + 2 \cdot 3^n}{4^n - 5^{n+1}} = 4$:

A. -20

B. 20

C. 2

D. 4

Tư luận:

Câu 1 a. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}$

b. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+3n-1}{3n^2+2}$

c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2+x-3}-2x)$

Câu 2. Chứng minh phương trình: $x^3 - 5x + 2 = 0$ có ít nhất 2 nghiệm

Câu 3: Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2-x-3}{2x-3} & \text{khi } x \neq \frac{3}{2} \\ 2m^2-6 & \text{khi } x = \frac{3}{2} \end{cases}$ liên tục tại $x = \frac{3}{2}$.