

ÔN TẬP CHƯƠNG VI BẤT PHƯƠNG TRÌNH

A. CÔNG THỨC

1. Xét dấu nhị thức

a) Dấu nhị thức bậc nhất $f(x) = ax + b$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
f(x)	(Trái dấu với hệ số a)		(Cùng dấu với hệ số a)

* **Chú ý:** Với $a > 0$ ta có:

$$|f(x)| \leq a \Leftrightarrow -a \leq f(x) \leq a \qquad |f(x)| \geq a \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq -a \\ f(x) \geq a \end{cases}$$

b) **Bảng xét dấu tam thức bậc hai:** $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0, \Delta = b^2 - 4ac$

+ Có hai nghiệm $\Delta > 0$

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
f(x)	(Cùng dấu với hệ số a)		(Trái dấu với hệ số a)	(Cùng dấu với hệ số a)

+ Có nghiệm kép $\Delta = 0$.

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
f(x)	(cùng dấu với hệ số a)		(Cùng dấu với hệ số a)

+ Vô nghiệm $\Delta < 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
f(x)	(Cùng dấu với hệ số a)	

c) Dấu của nghiệm số

Cho $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$

a) $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta = b^2 - 4ac \geq 0$

b) $ax^2 + bx + c = 0$ có 2 nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow a.c < 0$

c) $ax^2 + bx + c = 0$ có 2 nghiệm cùng dấu $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ a.c > 0 \end{cases}$

c) $ax^2 + bx + c = 0$ có các nghiệm dương $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} > 0 \\ S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} > 0 \end{cases}$

d) $ax^2 + bx + c = 0$ có các nghiệm âm $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} > 0 \\ S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} < 0 \end{cases}$

Chú ý: Dấu của tam thức bậc hai luôn luôn cùng dấu với hệ số a khi $\Delta < 0$

$$\text{i) } ax^2 + bx + c > 0, \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \quad \text{ii) } ax^2 + bx + c < 0, \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$$

$$\text{iii) } ax^2 + bx + c \geq 0, \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \quad \text{iv) } ax^2 + bx + c \leq 0, \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$$

d) Cách giải bất phương trình bậc hai:

Để giải bất pt bậc hai, ta áp dụng định lí và dấu tam thức bậc hai

♦*Bước 1:* Đặt vế trái bằng f(x), rồi xét dấu f(x)

♦*Bước 2:* Dựa vào bảng xét dấu và chiều của bpt để kết luận nghiệm của bất phương trình.

Công thức giải phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối:

$$+ |A| < B \Leftrightarrow \begin{cases} B > 0 \\ -B < A < B \end{cases}$$

$$+ |A| > B \Leftrightarrow \begin{cases} B < 0 \\ A \text{ có nghĩa} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} B \geq 0 \\ A < -B \\ A > B \end{cases}$$

Với $B > 0$ ta có

$$+ |A| < B \Leftrightarrow -B < A < B \quad + |A| > B \Leftrightarrow \begin{cases} A < -B \\ A > B \end{cases}$$

Công thức giải phương trình chứa ẩn trong dấu căn:

$$+ \sqrt{A} < B \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ B > 0 \\ A < B^2 \end{cases} \quad A > B \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ B < 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} B \geq 0 \\ A > B^2 \end{cases}$$

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Bất phương trình và hệ bất phương trình bậc nhất một ẩn

Bài 1. Giải các bất phương trình sau:

a. $\frac{3x+1}{2} - \frac{x-2}{3} < \frac{1-2x}{4}$.

b. $(2x-1)(x+3) - 3x + 1 \leq (x-1)(x+3) + x^2 - 5$.

c. $-2x + \frac{3}{5} > \frac{3(2x-7)}{3}$.

d. $3 - \frac{2x+1}{5} > x + \frac{3}{4}$.

e. $\frac{5(x-1)}{6} - 1 < \frac{2(x+1)}{3}$.

f. $2 + \frac{3(x+1)}{8} < 3 - \frac{x-1}{4}$.

Bài 2. Giải các hệ bất phương trình sau:

$$\text{a. } \begin{cases} 3x-1 \geq 2x+7 \\ 4x+3 > 2x+19 \end{cases}$$

$$\text{b. } \begin{cases} 6x + \frac{5}{7} < 4x+7 \\ \frac{8x+3}{2} < 2x+5 \end{cases}$$

$$\text{c. } \begin{cases} \frac{4}{3} - 12x \leq x + \frac{1}{2} \\ \frac{4x-3}{2} < \frac{2-x}{3} \end{cases}$$

$$\text{d. } \begin{cases} \frac{11-x}{2} \geq 2x-5 \\ 2(3x+1) \geq \frac{x-8}{2} \end{cases}$$

Bài 3. Tìm m để các bất phương trình sau vô nghiệm:

$$\text{a. } m^2x + 4m - 3 < x + m^2.$$

$$\text{b. } m^2x + 1 \geq m + (3m-2)x.$$

Dạng 2: Dấu của nhị thức bậc nhất

Bài 1. Xét dấu các biểu thức sau:

$$\text{a. } f(x) = (2x-1)(x+3).$$

$$\text{b. } f(x) = (3x-2)(-x+2)(x+3).$$

$$\text{c. } f(x) = \frac{(4-x)(5x-3)}{x+2}.$$

$$\text{d. } f(x) = \frac{-4}{3x+1} - \frac{3}{2-x}.$$

Bài 2. Giải các bất phương trình sau:

$$\text{a. } (2x-7)(4-5x) \geq 0.$$

$$\text{b. } (x+1)(x-1)(3x-6) > 0.$$

$$\text{c. } 3x(2x+7)(9-3x) \leq 0.$$

$$\text{d. } \frac{(2x-5)(x+2)}{-4x+3} > 0.$$

$$\text{e. } \frac{3}{x-2} \leq \frac{7}{2x-1}.$$

$$\text{f. } \frac{1}{x} + \frac{2}{x+3} < \frac{3}{x+2}.$$

$$\text{g. } \frac{x-3}{x+1} > \frac{x+5}{x-2}.$$

$$\text{h. } \frac{3x-4}{x-2} > 1.$$

$$\text{i. } \frac{2x^2+x}{1-2x} \geq 1-x.$$

Dạng 3: Dấu của tam thức bậc hai

Bài 1. Xét dấu các biểu thức sau:

$$\text{a. } f(x) = -x^2 + 3x - 2.$$

$$\text{b. } f(x) = 2x^2 - 5x + 2.$$

$$\text{c. } f(x) = 9x^2 - 24x + 16.$$

$$\text{d. } f(x) = -x^2 + 2x - 1.$$

$$\text{e. } f(x) = (3x^2 - 10x + 3)(4x - 5).$$

$$\text{f. } f(x) = (3x^2 - 4x)(2x^2 - x - 1).$$

$$\text{g. } f(x) = (4x^2 - 1)(-8x^2 + x - 3)(2x + 9).$$

$$\text{h. } f(x) = \frac{(3x^2 - x)(3 - x^2)}{4x^2 + x - 3}.$$

Bài 2. Giải các bất phương trình sau:

a. $4x^2 - x + 1 < 0$. b. $-3x^2 + x + 4 \leq 0$. c. $x^2 - x - 6 \leq 0$.
d. $\frac{-3x^2 - x + 4}{x^2 + 3x + 5} > 0$. e. $\frac{5x^2 + 3x - 8}{x^2 - 7x + 6} < 0$. f. $\frac{1}{x^2 - 4} < \frac{3}{3x^2 + x - 4}$.

Bài 3. Giải các hệ bất phương trình sau:

a. $\begin{cases} 2x^2 + 9x + 7 > 0 \\ x^2 + x - 6 < 0 \end{cases}$. b. $\begin{cases} 2x^2 + x - 6 > 0 \\ 3x^2 - 10x + 3 \geq 0 \end{cases}$. c. $\begin{cases} -2x^2 - 5x + 4 < 0 \\ -x^2 - 3x + 10 > 0 \end{cases}$.

Bài 4. Tìm m để các phương trình sau có nghiệm và vô nghiệm:

a. $(m-5)x^2 - 4mx + m - 2 = 0$. b. $(m-2)x^2 + 2(2m-3)x + 5m - 6 = 0$.
c. $(3-m)x^2 - 2(m+3)x + m + 2 = 0$. d. $(1+m)x^2 - 2mx + 2m = 0$.

Bài 5. Tìm m để các bất phương trình sau nghiệm đúng với mọi x:

a. $3x^2 + 2(m-1)x + m + 4 > 0$. b. $x^2 + (m+1)x + 2m + 7 > 0$. c. $mx^2 + (m-1)x + m - 1 < 0$.

Bài 6. Tìm m để các bất phương trình sau vô nghiệm:

a. $(m+2)x^2 - 2(m-1)x + 4 < 0$. b. $(m-3)x^2 + (m+2)x - 4 > 0$

Dạng 4: Một số phương trình và bất phương trình quy về bậc hai

Bài tập. Giải các bất phương trình sau:

a. $\frac{x^2 + 2x + 5}{x + 4} \geq x - 3$. b. $\frac{x^2 + 3x - 1}{2 - x} > -x$. c. $\frac{1}{x + 2} + \frac{x^2 - 3x + 3}{x^2 - 4x + 3} > \frac{x + 1}{x - 3}$.
d. $\frac{x - 2}{1 - x} + \frac{x - 3}{x + 1} \geq \frac{x^2 + 4x + 15}{x^2 - 1}$. e. $\frac{2}{x + 2} + \frac{1}{2} \leq \frac{-4}{x^2 + 2x}$.

Dạng 5: Bất phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối

Bài tập. Giải các bất phương trình sau:

a. $|3x - 2| > 7$. b. $|2x - 5| \leq 1$. c. $|x - 2| > x + 1$.
d. $|3x + 15| \geq 3$. d. $|x^2 - 1| - 2x < 0$. e. $|1 - 4x| \geq 2x + 1$.
f. $|x^2 - 3x + 2| + x^2 > 2x$.

Dạng 6: Bất phương trình chứa căn

Bài tập. Giải các bất phương trình sau:

a. $\sqrt{x^2 - x - 12} < 7 - x$. b. $\sqrt{21 - 4x - x^2} < x + 3$. c. $1 - x + \sqrt{2x^2 - 3x - 5} < 0$.

d. $\sqrt{-x^2 - 8x - 12} > x + 4.$ e. $\sqrt{x^2 - 3x - 10} \geq x - 2.$ f. $\sqrt{3x^2 + 13x + 4} + 2 - x \geq 0.$

g. $x^2 - 4x - 6 \geq \sqrt{2x^2 - 8x + 12}.$